سوال:

مقادیر متغیر های را به گونه ای مشخص کنید که دستگاه معادلات خطی مربوط به این ماتریس افزونه(Augmented Matrix) :

الف) ناسازگار باشد.

ب) سازگار و دارای یک جواب منحصر به فرد باشد.

ج) سازگار و دارای بی نهایت جواب باشد.

پاسخ:

برای مشخص کردن تعداد جواب های یک دستگاه معادلات خطی، همانطور که در اسلاید ها توضیح داده شده است، باید حداقل ماتریس افزونه مربوط به این دستگاه را به فرم نردبانی (Reduced Echelon) تبدیل کرد و در این فرم به بررسی آخرین ردیف از این ماتریس بپردازیم.

حال به بررسی حالات مختلف می پردازیم.

الف) برای این که این دستگاه معادلات ناسازگار بوده و جوابی نداشته باشد، باید که در ردیف آخر فرم نردبانی ماتریس افزونه، یک تناقض رخ دهد. بنابراین فرم کلی ردیف آخر به شکل که می باشد. بنابراین به ازای هر مقداری از که این حالت را برآورده کند، دستگاه معادلات ناسازگار خواهد بود. به طور کلی

یک نمونه :

ب) برای اینکه دستگاه معادلات سازگار با یک جواب منحصر به فرد باشد، باید که هیچ متغیر آزادی وجود نداشته باشد. تنها زمانی در این دستگاه معادلات خطی متغیر آزاد نخواهیم داشت که ستون های اول تا سوم ماتریس افزونه، دارای موقعیت محوری(Pivot Position) باشند. همانطور که در فرم نردبانی ماتریس افزونه این این دستگاه مشخص است، دو ستون اول، دارای موقعیت محوری بوده بنابراین تنها در صورتی این دستگاه سازگار با یک جواب منحصر به فرد خواهد بود که ستون سوم نیز دارای موقعیت محوری باشد. این امر، تنها زمانی اتفاق می افتد که باشد. بنابراین به ازای هر این دستگاه سازگار با یک جواب منحصر به فرد خواهد بود و مقادیر تاثیری در این حالت ندارند و می توانند هر مقدار دلخواهی را انتخاب کرد.

یک نمونه:

ج) برای اینکه دستگاه سازگار با بی شمار جواب باشد، لازم است که حداقل یک متغیر آزاد در این دستگاه معادلات وجود داشته باشد. همانطور که در قسمت «ب» گفته شد و با توجه به فرم نردبانی ماتریس افزونه این دستگاه معادلات خطی، دو ستون اول این ماتریس دارای موقعیت محوری هستند، بنابراین یک ستون محوری محسوب شده و به عنوان یک متغیر پایه در نظر گرفته می شوند. بنابراین تنها متغیر سوم می تواند یک متغیر آزاد باشد که برای این امر لازم است که ستون سوم از ماتریس افزونه، دارای موقعیت محوری نباشد.( ) از طرف دیگر برای رخ دادن بی نهایت جواب لازم است که به فرم در آخرین ردیف از فرم نردبانی ماتریس افزونه دستگاه معادلات برسیم. بنابراین هم باید برقرار باشد.

یک نمونه: